E.N.S.I. CHIMIE SUD

Programme P

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

1982

(4 h)

N. B. — *L'épreuve se compose de quatre parties qui peuvent se traiter de façon indépendante. Les candidats respecteront soigneusement la numérotation des questions.*

PREMIÈRE PARTIE

1° On se propose de résoudre l'équation :

$$2\cos\varphi + \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right| = 0$$

a. Montrer que cette équation admet sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ une racine α unique.

En déduire, en fonction de α, toutes les racines réelles de cette équation.

b. En itérant la méthode de Newton à partir de la valeur initiale 0,3, donner une valeur approchée de α en radians à 10^{-7} près. On indiquera les résultats obtenus à chaque itération.

2° On considère la courbe Γ_a de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(\varphi) = a\left(2\cos\varphi + \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right|\right) \\ y(\varphi) = 2a\sin\varphi \end{cases}$$

où a est un nombre réel strictement positif donné.

a. Préciser le domaine de définition de chaque fonction $x(\varphi)$ et $y(\varphi)$. Quelles sont les symétries apparentes de Γ_a?

b. Déterminer la valeur $y(\alpha)$.

c. Construire *avec soin* la courbe Γ_1 correspondant à $a = 1$, avec 5 cm comme unité sur chaque axe.

3° Calculer la longueur de l'arc de la courbe Γ_1 situé dans la portion de plan définie par $y \geqslant y(\alpha)$.

4° Calculer l'aire de la portion de plan limitée par cet arc.

DEUXIÈME PARTIE

On donne un plan affine π rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ désigné dans la suite par « le repère fixe du plan » et deux nombres réels strictement positifs v et a.

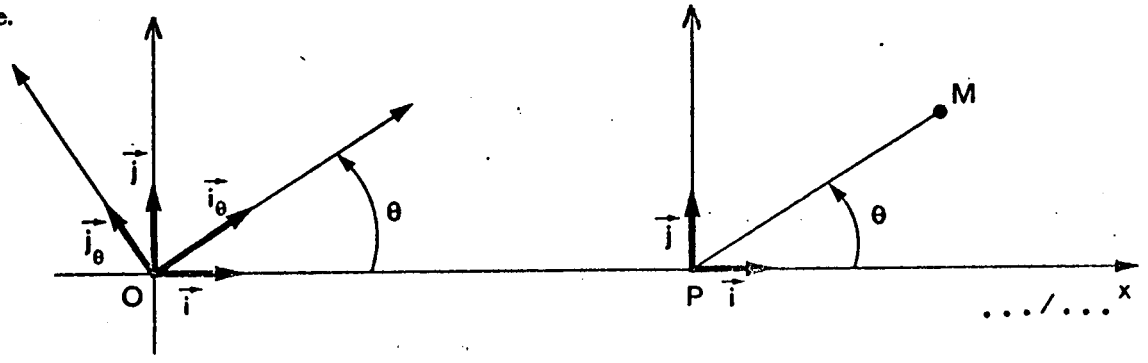
On désigne par Ox l'axe support du vecteur $\vec{i}$, orienté par ce vecteur.

Un point P se déplace sur l'axe Ox d'un mouvement uniforme de vitesse algébrique v. A l'instant initial $t = 0$ le point P est en O.

Un point M se déplace dans le plan π de façon que la distance PM soit constante et égale à $2a$ et que sa vitesse par rapport au repère fixe du plan (vitesse absolue) ait, à chaque instant, une norme égale à v.

A l'instant $t = 0$ le point M coïncide avec le point de coordonnées $(0; 2a)$ et sa vitesse absolue a pour composantes $(-v; 0)$.

L'angle θ du vecteur $\overrightarrow{PM}$ avec l'axe Ox est une fonction inconnue du temps que l'on supposera continûment dérivable.



. . . / . . .

1° On désigne par $(O; \vec{i_\theta}; \vec{j_\theta})$ le repère déduit de $(O; \vec{i}; \vec{j})$ par la rotation de centre O et d'angle θ.

a. Donner, en fonction des paramètres v, a, θ et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, les composantes S et T dans le repère $(O; \vec{i_\theta}; \vec{j_\theta})$ de la vitesse relative de M par rapport au repère mobile $(P; \vec{i}; \vec{j})$.

b. En étudiant le parallélogramme donnant la résultante des vitesses d'entraînement et relative montrer que $|T| = 2v\,|\sin\theta|$.

2° *a.* Donner l'expression de la vitesse absolue du point M en fonction de v, a, θ et $\dot{\theta}$.

b. En déduire que θ vérifie une équation différentielle (E) du premier ordre par rapport à la variable t.

c. Intégrer l'équation différentielle (E).

d. Déterminer une représentation paramétrique de paramètre θ de la trajectoire de M dans le repère fixe.

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie x désigne une variable réelle positive et a un paramètre réel.

A. On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$2x\frac{dy}{dx} + y = \frac{a}{1+x} \tag{1}$$

1° Trouver les solutions de l'équation (1) sur $\mathbb{R}_+$. En déduire qu'il existe une seule solution $y_1(x)$ qui tende vers une limite finie quand x tend vers zéro.

On désignera par $y_1(0)$ la valeur de cette limite.

2° On suppose que $y_1(x)$ est développable en série entière de x pour $x \geqslant 0$, c'est-à-dire qu'il existe des coefficients a_k pour $k \in \mathbb{N}$ tels que :

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

a. En remarquant que la fonction $\frac{a}{1+x}$ est développable en série entière de x, calculer les coefficients a_k. Quel est le rayon de convergence de la série (2)?

b. Montrer que la somme de cette série est solution de l'équation (1) dans $\mathbb{R}_+$.

B. On considère l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre, à coefficients non constants :

$$2x(1+x)\frac{d^2y}{dx^2} + (3+5x)\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{3}$$

1° Montrer que la fonction $y_2(x)$ définie pour $x > 0$ par $y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ vérifie, pour $x > 0$, la relation (3).

2° On désigne par z une fonction liée à la fonction inconnue y par la relation :

$$y(x) = z(x)\,y_2(x) \quad \text{pour tout } x > 0$$

a. Montrer que la fonction z vérifie une équation différentielle linéaire incomplète du second ordre (équation 4) pour $x > 0$.

b. Intégrer cette équation différentielle.

c. En déduire l'intégrale générale sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation (3).

.../...

3° Retrouver l'intégrale générale de l'équation (3) sur $\mathbb{R}_+^*$ en vérifiant que :

a. Toute solution de (1) deux fois dérivable est solution de (3).

b. Pour toute solution y de (3) il existe un réel a tel que y soit solution de (1).

QUATRIÈME PARTIE

Pour tout entier $n > 0$, on note u_n la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| < e$ par :

$$\begin{cases} u_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n} \operatorname{Log} \frac{1}{|x|}\right)^{-n^2} & \text{si } x \neq 0 \\ u_n(0) = 0 \end{cases}$$

1° Étudier, pour n fixé, la continuité et la dérivabilité de la fonction u_n en O.

2° Montrer que l'ensemble des valeurs de x telles que la série $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ soit convergente est un intervalle ouvert U de $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

3° *a.* Démontrer que, pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on a l'inégalité :

$$t - \frac{t^2}{2} \leqslant \operatorname{Log}(1 + t) \leqslant t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

b. En déduire un encadrement de u_n pour tout $x \in U$.

4° *a.* En utilisant le 3° *b*, montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout nombre réel x tel que $0 < |x| < 1$, le reste $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ satisfait aux inégalités :

$$\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log}^2 |x| + \frac{1}{3n} \operatorname{Log}^2 |x|\right) \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log}^2 |x|\right)$$

b. En déduire un équivalent de $R_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

c. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de la somme de la série numérique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail